

## Chapitre 5

# Localisation terrestre

### 5.1 Points de canevas

D'une façon générale, le *canevas* est un ensemble discret de points bien répartis sur la surface à lever, points dont les positions relatives sont déterminées avec une précision au moins égale à celle que l'on attend du levé ; ces points servent d'appui au levé des détails. Le canevas s'exprime par les coordonnées de ces points dans un même système.

Sur le territoire métropolitain, l'établissement de plusieurs points nouveaux sur un même chantier, ou *canevas d'ensemble*, est exceptionnel compte tenu de la densité des points existants.

#### 5.1.1 Intersection

L'intersection consiste à déterminer les coordonnées d'un point en mesurant exclusivement des angles horizontaux à partir des stations faites sur d'autres points de coordonnées connues. Les visées doivent être réparties aussi uniformément que possible autour du point à déterminer et leur nombre doit être suffisant pour assurer une détermination correcte.

L'intersection dispense de stationner le point à déterminer et par conséquent s'impose pour les points inaccessibles, comme les clochers par exemple.

Les observations débouchent sur les gisements des différentes visées en nombre redondant, le traitement des données (§ 5.2) fournit les coordonnées du point intersecté.

#### 5.1.2 Relèvement

Le relèvement consiste à déterminer les coordonnées d'un point en le stationnant et en effectuant un tour d'horizon sur des points d'appui de coordonnées connues.

Le relèvement ne nécessitant qu'une station est évidemment très économique, notamment si tous les points d'appui sont présignalés, clochers par exemple.

Le traitement des données (§ 5.2) fournit les coordonnées du point cherché.

### 5.1.3 Recouplement

Le recouplement est le procédé qui utilise simultanément l'intersection et le relèvement pour la détermination d'un point. Sa mise en œuvre est fréquente car on ne dispose pas toujours du nombre minimal de visées d'intersection ou de relèvement nécessaires à la mise en œuvre d'un seul de ces procédés.

Les *visées réciproques* sont constituées d'une visée d'intersection et d'une visée de relèvement, lesquelles génèrent deux lieux géométriques indépendants.

Le traitement des données (§ 5.2) fournit les coordonnées du point cherché.

### 5.1.4 Insertion

La *trilatération*, ou multilatération, est le procédé qui permet de déterminer les coordonnées d'un point à partir des mesures des distances à des points connus ; les distances, mesurées au distancemètre, sont réduites au système de projection avant d'entrer dans les calculs de coordonnées. En topographie, les distancemètres sont liés aux théodolites, lesquels fournissent les orientations et les inclinaisons des distances mesurées ; par conséquent, la multilatération qui utiliserait exclusivement des distances pour la détermination d'un point n'est pas employée, le topographe n'ayant aucune raison de se priver des visées d'intersection et de relèvement correspondant aux mesures des distances.

L'*insertion* est le procédé qui utilise simultanément l'intersection, le relèvement et la multilatération pour déterminer les coordonnées d'un point de canevas d'ensemble.

### 5.1.5 Station libre

Une station libre est la combinaison d'un relèvement et d'une multilatération. Elle consiste à stationner un point inconnu, à viser plusieurs points connus pour saisir les angles horizontaux et les distances inclinées. C'est une méthode fréquemment utilisée en topographie, notamment lors des implantations lorsque des stations préalablement établies ont disparu, cas fréquent sur les chantiers de travaux publics.

Une *résection* est une station libre s'appuyant sur deux points connus seulement.

Les calculs sont faits en temps réel avec un tachéomètre électronique programmé, sur dix points connus au maximum, avec contrôles : en résection par exemple, trois lieux géométriques indépendants (deux arcs de cercle et un arc capable) concourent à la détermination du point.

La station libre est calculable par une transformation d'Helmert ou un calcul en bloc (§ 5.2).

## 5.2 Traitement des données

### 5.2.1 Compensation par la méthode des moindres carrés

La compensation par moindres carrés est un outil de calcul entièrement numérique permettant d'évaluer la position d'un point, ainsi que sa précision. Elle est mise en œuvre aussi bien lors du calcul d'un point isolé, station libre par exemple, que dans un canevas polygonal. Elle est intégrée à la plupart des logiciels de calculs topométriques.

En topographie, afin d'obtenir des contrôles et d'améliorer la précision des résultats, on effectue un nombre surabondant de mesures. Du fait des erreurs accidentelles, toutes ces observations ne vont pas aboutir à un même point, mais à une zone délimitée par les lieux géométriques découlant des angles et distances mesurés. Le problème revient donc à déterminer la position la plus probable du point dans cette zone parmi la multitude de possibilités. Si  $v_i$  désigne les *résidus*, c'est-à-dire les écarts résiduels entre les points cherchés et les observations, la compensation par les moindres carrés consiste à *rendre minimale la somme des carrés des résidus*, critère qui fournit une *solution unique*.

Chaque observation génère une *relation d'observation* reliant les inconnues  $X, Y, Z$  aux mesures et à des constantes telles que les coordonnées des points d'appui ; la méthode des moindres carrés ne s'applique qu'à des relations d'observation linéaires, condition toujours réalisable si l'on connaît des valeurs approchées des inconnues.

### 5.2.1.1 Linéarisation des relations d'observation

Soit :  $f(X, Y, Z) = 0$  la fonction liant les trois coordonnées inconnues aux données.

Si  $X_a, Y_a, Z_a$  sont des valeurs approchées des inconnues il vient :  $X = X_a + dX, Y = Y_a + dY, Z = Z_a + dZ$ .

Le développement de Taylor limité aux termes du premier degré donne :

$$f(X, Y, Z) = f(X_a, Y_a, Z_a) + f'(X_a) \cdot dX + f'(Y_a) \cdot dY + f'(Z_a) \cdot dZ,$$

expression dans laquelle  $f(X_a, Y_a, Z_a) = k$  est un terme constant, calculable à partir des coordonnées approchées et des observations.

Si :  $f'(X_a) = a, f'(Y_a) = b, f'(Z_a) = c$  sont des coefficients fournis par les observations et les coordonnées approchées, la fonction reliant  $X, Y, Z$  aux observations est linéarisée sous la forme  $a \cdot dX + b \cdot dY + c \cdot dZ + k = 0$ .

Chaque observation génère une équation de cette forme et, comme les mesures sont surabondantes, il en résulte un système qui n'admet pas de solution rigoureuse puisque le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues.

Pour résoudre un tel système, on fait intervenir au niveau de chaque équation un résidu  $v_i$  qui représente l'écart résiduel entre les valeurs approchées et les valeurs observées :

$$\begin{aligned} a_1 \cdot dX + b_1 \cdot dY + c_1 \cdot dZ + k_1 &= v_1 \\ &\vdots \\ a_n \cdot dX + b_n \cdot dY + c_n \cdot dZ + k_n &= v_n \end{aligned}$$

La meilleure solution, au sens des probabilités, correspond à une somme  $S$  des  $v_i^2$  minimale, ce qui conduit à la *normalisation* des relations d'observation.

### 5.2.1.2 Normalisation des relations d'observation

Elle consiste à se ramener d'un système surabondant de  $p$  équations à  $n$  inconnues à un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues.

#### *Solution analytique*

La condition :  $S = \sum v_i^2$  minimale, implique que les dérivées partielles :  $S'_{X_a}, S'_{Y_a}, S'_{Z_a}$  soient simultanément nulles.

Chaque dérivation donne une équation et une seule ; on se ramène donc à un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\sum a_a \cdot dX + \sum a_b \cdot dY + \sum a_c \cdot dZ + \sum a_k = 0$$

$$\sum a_b \cdot dX + \sum b_b \cdot dY + \sum b_c \cdot dZ + \sum b_k = 0$$

$$\sum a_c \cdot dX + \sum b_c \cdot dY + \sum c_c \cdot dZ + \sum c_k = 0$$

avec :  $\sum a_a = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \dots + a_n \cdot a_n = \sum_{i=1}^n a_i^2$ .

Ce système des équations normalisées, linéaire et symétrique par rapport à la diagonale principale, est extensible en fonction du nombre des inconnues. Mais pour le calcul en bloc de plusieurs points nouveaux, la solution analytique est difficile à mettre en application; il est préférable d'écrire les relations d'observation en utilisant la notation matricielle.

#### Solution matricielle

Le système des relations d'observation peut s'écrire sous la forme :  $[A] \cdot [X] + [K] = [V]$ , avec :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Soit S la somme des  $v_i^2$  :

$$\begin{aligned} S &= V^t \cdot V \\ V^t &= X^t \cdot A^t + K^t \\ S &= (X^t \cdot A^t + K^t) \cdot (A \cdot X + K) \end{aligned}$$

De la même manière que précédemment, S sera minimale lorsque sa dérivée sera nulle.

$$dS = dX^t \cdot (A^t \cdot A \cdot X + A^t \cdot K) + (X^t \cdot A^t \cdot A + K^t \cdot A) \cdot dX$$

Soit :

$$M = A^t \cdot A \cdot X + A^t \cdot K$$

Sa transposée s'écrit :

$$M^t = X^t \cdot A^t \cdot A + K^t \cdot A$$

dS peut donc se mettre sous la forme :  $dS = dX^t \cdot M + M^t \cdot dX$

La condition de minimisation :  $dS = 0$  conduit donc à annuler M, soit :  $A^t \cdot A \cdot X + A^t \cdot K = 0$

Posons :  $N = A^t \cdot A$  et  $C = A^t \cdot K$ , avec :

$$A^t = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} \sum a_i^2 & \sum a_i b_i & \sum a_i c_i \\ \sum b_i a_i & \sum b_i^2 & \sum b_i c_i \\ \sum c_i a_i & \sum c_i b_i & \sum c_i^2 \end{bmatrix} \cdot C \quad C = \begin{bmatrix} \sum a_i k_i \\ \sum b_i k_i \\ \sum c_i k_i \end{bmatrix}$$

On a donc :  $N \cdot X + C = 0$ , relation équivalente à celle obtenue en calculant les dérivées partielles.

Cette procédure de calcul, développée dans le cas particulier d'un système de p équations à 3 inconnues avec  $p > 3$ , se généralise. Ainsi, quel que soit le nombre d'observations et le nombre d'inconnues, la normalisation du système des équations d'observation est aisément mise en œuvre par informatique puisqu'elle est obtenue par deux produits de matrices.

### 5.2.1.3 Résolution du système d'équations normalisées

La matrice  $N$  est symétrique et tous les termes principaux sont situés à proximité de la diagonale principale ; mais comme les autres termes ne sont pas nuls, elle ne peut pas bénéficier des méthodes particulières de résolution réservées à des matrices-bandes. D'autre part, les inconnues  $dX$ ,  $dY$  et  $dZ$  rangées dans le vecteur  $V$  sont très petites car elles représentent les écarts entre les coordonnées définitives et approchées. Il en résulte que la résolution d'un tel système doit être effectuée avec un algorithme qui garantit la précision des résultats.

Ce système linéaire et symétrique est résolu avec une très grande précision par la méthode de Cholesky, qui substitue à la matrice  $N$  le produit d'une matrice triangulaire supérieure  $H$  par une matrice triangulaire inférieure, la seconde ayant pour particularité d'être la transposée de la première.

$N \cdot X = -C$  est remplacé par :  $H^t \cdot H \cdot X = -C$  ; avec :  $Y = H \cdot X$ , on déduit d'abord  $Y$  avec :  $H^t \cdot Y = -C$ , puis  $X$  avec :  $H \cdot X = Y$ .

On obtient ainsi les valeurs optimales  $dX$ ,  $dY$ ,  $dZ$  pour chaque point du réseau, permettant à celui-ci de « coller » au mieux avec les observations.

La détermination des coefficients des relations d'observation est fonction de la nature de la compensation recherchée ; si la relation n'a pas la forme d'une équation linéaire, le développement de Taylor, mis en œuvre avec des valeurs approchées des inconnues, permet la linéarisation.

## 5.2.2 Transformation d'Helmert

La transformation d'Helmert (géodésien allemand 1843-1917) est une similitude permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre. En topographie, elle est généralement utilisée pour passer d'un système local à un système Lambert par exemple.

Elle est composée d'une rotation, d'une translation et d'une homothétie ou changement d'échelle définis à partir de points de calage (deux au minimum), connus dans le système de départ et d'arrivée et calculés de manière à minimiser la somme des carrés des distances  $D_i$  entre les points connus et ces mêmes points transformés. Elle s'apparente donc à une compensation par moindres carrés.

Soient  $(X, Y)$  les coordonnées dans le système d'arrivée et  $(x, y)$  celles du système de départ.

Si  $k$  est le facteur de mise à l'échelle, généralement proche de 1,  $\theta$  l'angle de rotation et  $(P, Q)$  le vecteur de translation, les coordonnées  $(X, Y)$  sont calculées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X &= k \times \cos \theta \times x + k \times \sin \theta \times y + P \\ Y &= -k \times \sin \theta \times x + k \times \cos \theta \times y + Q \end{aligned}$$

En posant :  $A = k \times \cos \theta$  et  $B = k \times \sin \theta$ , on obtient :

$$\begin{aligned} X &= A \times x + B \times y + P \\ Y &= A \times y - B \times x + Q \end{aligned}$$

En théorie, les paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $P$  et  $Q$  sont calculables à partir de 2 points de calage seulement. En pratique, il est préférable d'en utiliser davantage pour plus de précision et pour l'application des moindres carrés ; les paramètres sont calculés de manière à ce  $\sum D_i^2$  que soit minimum.

### 5.2.3 Calcul en bloc

Le calcul en bloc permet un calcul global d'un ensemble de points nouveaux en tenant compte de tous les lieux géométriques déterminatifs. Il offre l'avantage de ne pas privilégier un point par rapport à un autre, en évitant la *filiation* d'un point nouveau au suivant ; en outre, il permet parfois la détermination lorsque la méthode point par point ne peut être mise en œuvre faute d'un nombre suffisant d'observations.

Les données sont d'une part les coordonnées des points déterminés antérieurement, d'autre part les observations azimutales et les mesures des distances. Un premier calcul provisoire fournit un réseau approché dont toutes les observations  $O$  donnent des lieux déterminatifs calculés  $C$ .

Pour fixer la position définitive des points nouveaux, il convient d'apporter à chaque lieu  $C$  une compensation  $dC$ . Les lieux déterminatifs n'étant pas rigoureusement concourants compte tenu de l'imprécision des points d'appui et des observations, chaque observation  $O_i$  : mesure angulaire ou mesure de distance, donne une relation d'observation de la forme :  $(C_i + dC_i) - O_i = v_i$  dans laquelle  $v_i$  est le résidu entre les éléments observés et les éléments compensés.

La compensation est calculée par la *méthode des moindres carrés* qui rend  $\sum v_i^2$  minimale et par conséquent donne un résultat unique ; ainsi la compensation du réseau est globale, d'où l'appellation compensation en bloc ou *calcul en bloc*.

En pratique, les corrections  $dC$  sont exprimées en fonctions des inconnues  $dE$ ,  $dN$ ,  $dG_0$  qui représentent les corrections à apporter respectivement aux coordonnées approchées des points nouveaux et aux  $G_0$  provisoires calculés aux points stationnés.

La compensation en bloc en altimétrie est faite après et indépendamment de la compensation planimétrique, avec les relations d'observations correspondantes.

Le calcul en bloc, en planimétrie puis en altimétrie, permet la compensation de figures géométriques complexes, les résultats étant d'autant meilleurs que le nombre des déterminations est plus redondant ; de ce point de vue d'ailleurs, les topographes, généralement fidèles à la hiérarchie des canevas, peuvent sans doute évoluer vers des concepts plus souples et plus généraux.

## 5.3 Canevas polygonal

### 5.3.1 Cheminements planimétriques

Le canevas polygonal, ou *polygonation*, est l'ensemble des polygones formés par les *cheminements planimétriques*, qui sont des lignes brisées parcourues en mesurant les angles et les longueurs des côtés pour, ensuite, calculer les coordonnées des sommets.

Un cheminement est *goniométrique* lorsque les gisements de ses côtés sont calculés à partir de gisements de référence et des angles mesurés que font entre eux les côtés successifs.

Un cheminement est *décliné* lorsque les gisements de ses côtés sont mesurés directement sur le terrain avec un théodolite décliné. Étant donné la faible précision de l'écart-type d'un azimut magnétique et le fait que l'erreur commise n'affecte qu'un côté sans répercussion sur les suivants, ce procédé peut éventuellement présenter de l'intérêt pour un cheminement comportant de nombreux côtés courts ; en dehors de rares travaux forestiers, le cheminement décliné n'est plus utilisé.

Le canevas polygonal, constitué de cheminements planimétriques goniométriques, est souvent un canevas intermédiaire de lignes entre les points d'appui connus et le levé des détails.

## 5.3.2 Cheminement ouvert

### 5.3.2.1 Observations

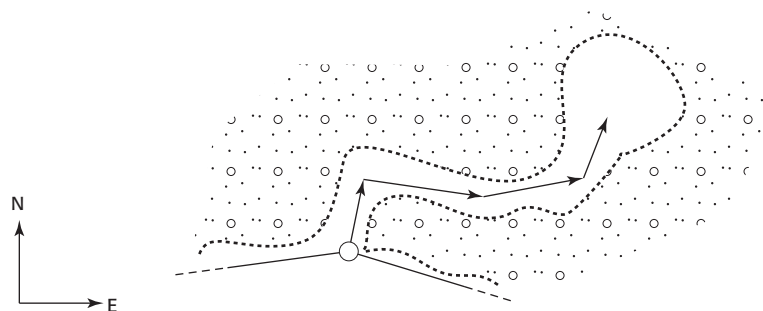


Figure 5.1. Ligne polygonale.

Le cheminement ouvert, ou ligne polygonale ou cheminement en antenne, est une ligne brisée orientée (figure 5.1) définie géométriquement par :

- une origine connue en coordonnées rectangulaires, dans un repère orthonormé local (x,y) ou un système de représentation national (E, N) : Lambert ou UTM par exemple ;
- une direction de référence à l'origine, dont le gisement est connu ;
- les angles azimutaux des côtés successifs, y compris celui à l'origine entre la direction de référence et le premier côté ;
- les longueurs des côtés réduites au système de projection ou au minimum à l'horizontale si le calcul est fait dans un repère orthonormé local.

Les angles sont mesurés avec un théodolite, les distances au distancemètre.

### 5.3.2.2 Calculs

Les calculs s'effectuent en deux phases.

*Première phase : orientation*

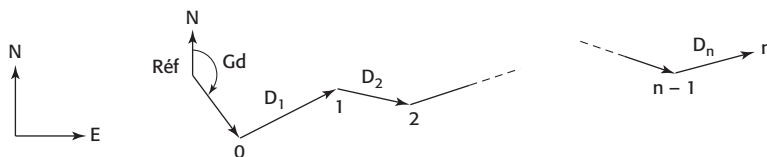


Figure 5.2. Notations d'un cheminement ouvert.

Soit un cheminement ouvert de  $n$  côtés, d'origine 0 et d'extrémité  $n$  (figure 5.2). L'orientation de référence, ou *gisement de départ*  $G_d$ , est le gisement de la direction issue de la référence et aboutissant à l'origine 0 du cheminement ; ainsi, le  $G_0$  de la station (§ 8.2.2) faite au point de départ 0 du cheminement donne comme gisement de départ :  $G_d = G_0 + 200$  (figure 5.3)

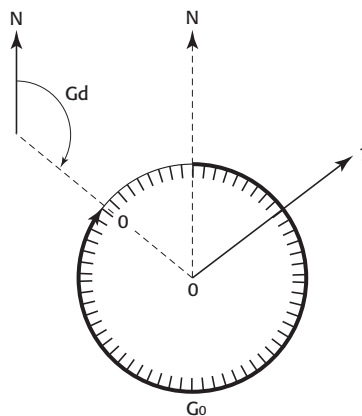


Figure 5.3. Gisement de départ.

L'*angle polygonal*  $\hat{A}_i$  de deux côtés successifs (figure 5.4) est l'angle azimutal du côté arrière  $i$  et du côté avant  $i+1$ , autrement dit l'angle qu'un opérateur laisse à sa gauche en parcourant le cheminement de l'origine vers l'extrémité :  $\hat{A}_i = (-i, i+1)$ .

L'angle polygonal à l'origine vaut donc :  $\hat{A}_0 = (0.\text{réf}, 0.1)$ .

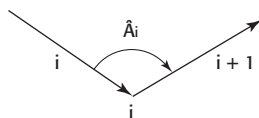


Figure 5.4. Angle polygonal.



La *transmission des gisements* consiste à calculer les gisements des côtés successifs à partir du gisement de départ et des angles polygonaux. (figure 5.5)

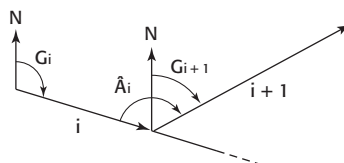


Figure 5.5. Transmission d'un gisement.

$$G_{i+1} = (\vec{N}, \vec{i+1}) = (\vec{N}, \vec{-i}) + (\vec{-i}, \vec{i+1}) = G_{-i} + \hat{A}_i = G_i + 200 + \hat{A}_i$$

Comme :  $0 \leq G_{i+1} < 400 \Rightarrow G_{i+1} = G_i + 200 + \hat{A}_i - 400 = G_{i+1} = G_i + \hat{A}_i - 200$ .

Le gisement d'un côté est égal au gisement du côté précédent augmenté de l'angle polygonal puis réduit de 200 grades.

Par suite :  $G_1 = G_d + \hat{A}_0 - 200 \Rightarrow G_2 = G_1 + \hat{A}_1 - 200, \dots, G_n = G_{n-1} + \hat{A}_{n-1} - 200$ .

#### Seconde phase : coordonnées

D désignant les distances réduites à la projection (§ 3), les composantes en abscisses et ordonnées des vecteurs successifs, appelées parfois coordonnées relatives, valent :

$$\begin{array}{ll} \Delta E_1 = D_1 \cdot \sin G_1 & \Delta N_1 = D_1 \cdot \cos G_1 \\ \Delta E_2 = D_2 \cdot \sin G_2 & \Delta N_2 = D_2 \cdot \cos G_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Delta E_i = D_i \cdot \sin G_i & \Delta N_i = D_i \cdot \cos G_i \\ \vdots & \vdots \\ \Delta E_n = D_n \cdot \sin G_n & \Delta N_n = D_n \cdot \cos G_n \end{array}$$

Ces valeurs intermédiaires sont calculées avec un plus grand nombre de chiffres significatifs que celui des coordonnées des sommets ; ces dernières, encore appelées coordonnées absolues, sont obtenues de proche en proche de 0 à n :

$$\begin{array}{ll} E_1 = E_0 + \Delta E_1 & N_1 = N_0 + \Delta N_1 \\ E_2 = E_1 + \Delta E_2 & N_2 = N_1 + \Delta N_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_i = E_{i-1} + \Delta E_i & N_i = N_{i-1} + \Delta N_i \\ \vdots & \vdots \\ E_n = E_{n-1} + \Delta E_n & N_n = N_{n-1} + \Delta N_n \end{array}$$

## Exemple

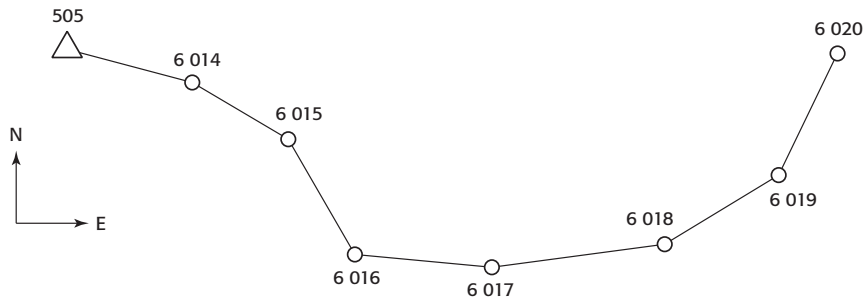


Figure 5.6. Cheminement ouvert.

Cheminement ouvert issu du point connu 505 (figure 5.6), dans le système de projection CC50 ; désignation des sommets (§ 5.3.7.2.)

STATIONS	POINTS VISÉS	ANGLES AZIMUTaux	DISTANCES RÉDUITES	E	N
505	25 6014	0 gon 243,692	153,827 m	1 658 657,48 m	9 315 362,84 m
6014	505 6015	0 210,350	170,193	1 661 785,74	9 315 813,74
6015	6016 6014	0 163,919	127,710		
6016	6017 6015	0 256,796	165,993		
6017	6018 6016	0 237,288	187,283		
6018	6017 6019	0 154,854			
6019	6020 6018	0 239,426	117,772 179,774		

Les calculs, effectués en tableau, conservent aux valeurs intermédiaires G, D,  $\Delta E$ ,  $\Delta N$  un chiffre significatif supplémentaire par rapport aux données, de manière à ne pas perdre de précision sans pour autant alourdir la transcription ; bien entendu, en calcul programmé, tous les chiffres significatifs des valeurs intermédiaires sont conservés, ce qui peut modifier quelques-uns des résultats d'une unité du dernier ordre conservé.

SÉQUENCES	FIGURES - FORMULES - FONCTIONS	RÉSULTATS
Calculs préparatoires 1- Gisement de départ	Conversion R $\rightarrow$ P $\xrightarrow{25,505}$	Gd = 90,8867 gon

SOMMETS	ORIENTATION		COORDONNÉES				
	Â	G	D	$\Delta E$	E	$\Delta N$	N
25 ↓ 505	243,692 gon	90,8867 gon			1 661 785,74 m		9 315 813,74 m
↓ 6014	210,350	134,5787	153,827 m	131,688 m	1 661 917,43	- 79,505 m	9 315 734,24
↓ 6015	236,081	144,9287	170,193	129,539	1 662 046,967	- 110,386	9 315 623,85
↓ 6016	143,204	181,0097	127,710	37,533	1 662 084,50	- 122,070	9 315 501,78
↓ 6017	162,712	124,2137	165,993	154,130	1 662 238,63	- 61,624	9 315 440,16
↓ 6018	154,854	86,9257	187,283	1 83,347	1 662 421,98	38,193	9 315 478,35
↓ 6019	160,574	41,7797	179,774	109,693	1 662 531,67	142,430	9 315 620,78
↓ 6020		2,3537	117,772	4,353	1 662 536,02	117,692	9 315 738,47

#### Valeur des résultats

Le calcul en retour, effectué par conversions R  $\rightarrow$  P des côtés avec les coordonnées définitives des sommets arrondies à l'approximation des données, donne les gisements puis, par différences, les angles polygonaux, ainsi que les distances.

Il ne contrôle que les calculs, pas une erreur parasite d'observation ou une faute d'introduction d'une donnée.

29/09/11 13:06

La transmission des gisements donne :

$$\begin{aligned}
 G_1 &= G_d + \hat{A}_0 - 200 \\
 G_2 &= G_1 + \hat{A}_1 - 200 \\
 &\vdots \\
 G_{i+1} &= G_i + \hat{A}_i - 200 \\
 &\vdots \\
 G_f &= G_n + \hat{A}_n - 200 \\
 \hline
 G_f &= G_d + \sum_{i=0}^n \hat{A}_i - (n+1) 200
 \end{aligned}$$

Du fait de l'imprécision des gisements de référence imposés  $G_d$  et  $G_f$ , comme de celle des angles polygonaux mesurés, le gisement de fermeture, ainsi calculé directement à partir du gisement de départ  $G_d$  et de la somme des angles, correspond à un *gisement approché*  $G_{f_a}$  voisin du gisement définitif  $G_f$  ; la formule opérationnelle s'écrit donc :

$$0 \leq G_{f_a} = G_d + \sum_{i=0}^n \hat{A}_i - (n+1) 200 < 400.$$

D'où l'*écart de fermeture angulaire* :  $e_{\hat{A}} = G_{f_a} - G_f$ , dont la valeur absolue doit être strictement inférieure à la tolérance  $T_A$  pour autoriser la poursuite des calculs.  $T_A$  est fonction de la précision sur le gisement de départ, le gisement d'arrivée et la mesure des angles du cheminement.

Les gisements de référence à l'origine et à l'extrémité, ayant a priori la même précision, influent de la même manière sur les gisements calculés des côtés, lesquels doivent par conséquent différer d'exactement 200 gon selon que la transmission est faite de 0 vers n ou de n vers 0 ; le cheminement est alors dit *réversible*. Rendre un cheminement réversible consiste donc à annuler l'écart de fermeture angulaire en appliquant une correction  $c_{\hat{A}}$  opposée de l'écart :

$$G_f = G_{f_a} + c_{\hat{A}} \Rightarrow c_{\hat{A}} = G_f - G_{f_a} = -e_{\hat{A}}.$$

En pratique, seule la correction est calculée du fait que sa valeur absolue, identique à celle de l'écart de fermeture angulaire, suffit pour vérifier que ce dernier est strictement inférieur à la tolérance.

Le gisement de fermeture approché  $G_{f_a}$  provenant du gisement de départ non modifiable ainsi que des angles polygonaux tous mesurés en principe avec la même précision, l'*ajustement* consiste à répartir la correction  $c_{\hat{A}}$  sur les différents angles proportionnellement à leur nombre :

$$c_{\hat{A}_i} = \frac{c_{\hat{A}}}{n+1}$$

En cas d'arrondi, pénaliser les angles qui ont les côtés les plus courts.

Les gisements réversibles se calculent de proche en proche par transmission du gisement de départ avec les angles polygonaux ajustés :  $G_{i+1} = G_i + (\hat{A}_i + c_{\hat{A}_i}) - 200$ .

Vérifier qu'en fin de transmission, on retrouve bien le gisement de fermeture imposé. Il est indispensable de rendre le cheminement réversible avant de passer à la seconde phase du

calcul, c'est-à-dire au calcul des coordonnées, si l'on veut obtenir, avec des procédés d'ajustement simples, les mêmes coordonnées pour un sommet quel que soit le sens dans lequel le cheminement est calculé.

#### Réorientation

La réorientation consiste à réduire l'accumulation des erreurs d'angles polygonaux lors de la transmission des gisements ; elle présente de l'intérêt notamment lorsque le cheminement se compose de côtés courts et nombreux.

#### Cheminement d'angles

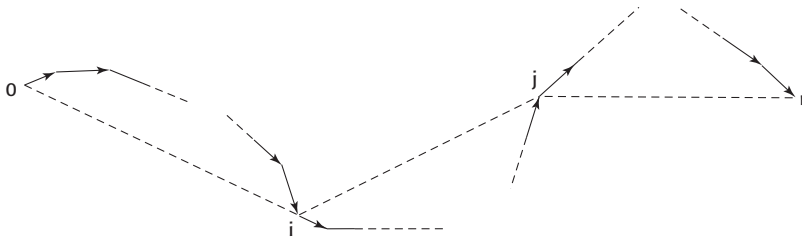


Figure 5.9. Cheminement d'angles.

Si le terrain le permet, choisir un ou plusieurs sommets du cheminement,  $i$  et  $j$  par exemple (figure 5.9) tels que l'on ait l'intervisibilité  $0-i$ ,  $i-j$ ,  $j-n$  et effectuer les tours d'horizon sur ces points ainsi que sur les sommets consécutifs.

Rendre réversible le « cheminement d'angles »  $0ijn$ , puis chaque tronçon du cheminement proprement dit :  $0-1\dots i$ ,  $i\dots j$ ,  $j\dots n$ .

#### Gisement intermédiaire

Si du sommet  $i$  par exemple (figure 5.10), on peut observer une direction  $i\vec{P}$  dont le gisement a été déterminé depuis un point  $P$  stationnable, tel un point de canevas d'ensemble, rendre réversibles successivement les deux tronçons  $0-i$  puis  $i-n$ .

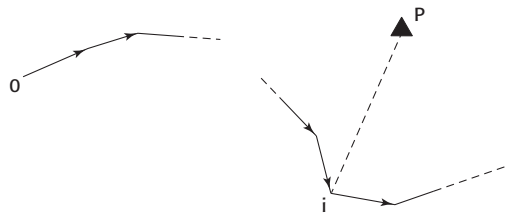


Figure 5.10. Gisement intermédiaire.

Le procédé peut évidemment être étendu à plusieurs sommets.

#### Réorientation astronomique ou gyroscopique

Au sommet  $i$  par exemple, déterminer l'azimut géographique puis le gisement du côté  $i+1$  par des observations sur le soleil ou la polaire, ou encore à l'aide d'un gyrothéodolite ; rendre réversibles les tronçons  $0-i$ , puis  $i-n$ .

**Seconde phase : coordonnées**

Les  $\Delta E$  et  $\Delta N$ , calculés à l'aide des gisements réversibles et des distances réduites, donnent :

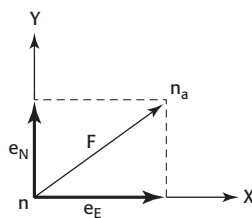
$$\begin{array}{rcl}
 E_1 & = & E_0 + \Delta E_1 \\
 E_2 & = & E_1 + \Delta E_2 \\
 \vdots & & \\
 E_{i+1} & = & E_i + \Delta E_{i+1} \\
 \vdots & & \\
 E_n & = & E_{n-1} + \Delta E_n \\
 \hline
 E_n & = & E_0 + \sum_{i=1}^n \Delta E_i
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 N_1 & = & N_0 + \Delta N_1 \\
 N_2 & = & N_1 + \Delta N_2 \\
 \vdots & & \\
 N_{i+1} & = & N_i + \Delta N_{i+1} \\
 \vdots & & \\
 N_n & = & N_{n-1} + \Delta N_n \\
 \hline
 N_n & = & N_0 + \sum_{i=1}^n \Delta N_i
 \end{array}$$

Du fait de l'imprécision des coordonnées de 0 et n et de celle des  $\Delta$ , les coordonnées de n, ainsi calculées directement à partir de celles de l'origine 0 et de la somme algébrique des  $\Delta$ , correspondent à une extrémité approchée  $n_a$  voisine de l'extrémité exacte n ; les formules opérationnelles s'écrivent donc :

$$E_{n_a} = E_0 + \sum_{i=1}^n \Delta E_i$$

$$N_{n_a} = N_0 + \sum_{i=1}^n \Delta N_i$$

D'où les écarts de fermeture planimétrique :  $e_E = E_n - E_{n_a}$ ,  $e_N = N_n - N_{n_a}$ , composantes en abscisse et ordonnée du *vecteur de fermeture planimétrique* (figure 5.11) :  $F = n, n_a = \sqrt{e_E^2 + e_N^2}$ .



**Figure 5.11.** Vecteur de fermeture planimétrique.

Le vecteur  $F$  doit être strictement inférieur à la tolérance  $T_F$  pour autoriser la poursuite du calcul.

La tolérance  $T_F$  est fonction de la précision du point de départ, du point d'arrivée et de la longueur du cheminement.

Le point extrémité n étant unique, ses coordonnées  $E_n$ ,  $N_n$  le sont aussi, ce qui contraint le calculateur à résorber les écarts de fermeture en appliquant des corrections  $c_E$  aux abscisses relatives,  $c_N$  aux ordonnées relatives, opposées des écarts respectifs.

$$E_n = E_{n_a} + c_E \Rightarrow c_E = E_n - E_{n_a} = -e_E$$

$$N_n = N_{n_a} + c_N \Rightarrow c_N = N_n - N_{n_a} = -e_N$$

En pratique, seules les corrections sont calculées puisqu'elles suffisent pour déterminer le vecteur de fermeture :  $F = \sqrt{c_E^2 + c_N^2}$ .

Les coordonnées de l'extrémité approchée  $n_a$  provenant des coordonnées de l'origine 0 non modifiables ainsi que des  $\Delta E$  et  $\Delta N$ , l'ajustement consiste à répartir les corrections  $c_E$  et  $c_N$  sur les coordonnées relatives, proportionnellement aux longueurs des côtés ; pour le vecteur  $\vec{i}$  les corrections partielles à appliquer à  $\Delta E_i$  et  $\Delta N_i$  valent donc :

$$c_{Ei} = \frac{c_E \cdot D_i}{\sum_{i=1}^n D_i} \quad c_{Ni} = \frac{c_N \cdot D_i}{\sum_{i=1}^n D_i}$$

L'*ajustement*, mal nécessaire qui n'améliore pas les observations, est surtout une satisfaction de l'esprit, ce qui justifie la simplicité du calcul des corrections partielles proportionnellement aux distances pour la plupart des cheminements du canevas polygonal ; des méthodes de compensation plus élaborées, comme les moindres carrés, présentent surtout de l'intérêt pour les canevas de précision.

Les coordonnées relatives ajustées fournissent les coordonnées des sommets calculées de proche en proche de 0 à n.

$$E_{i+1} = E_i + (\Delta E_{i+1} + c_{Ei+1})$$

$$N_{i+1} = N_i + (\Delta N_{i+1} + c_{Ni+1})$$

Contrôle, en vérifiant qu'en fin de calcul on retrouve exactement les coordonnées connues de l'extrémité n.

#### Exemple

En admettant que l'extrémité du cheminement ouvert précédent (§ 5.3.2) soit non pas le point 6020 mais le sommet 2006 d'un autre cheminement déjà calculé (figure 5.12), déterminer les coordonnées des sommets du cheminement encadré ordinaire 505 → 2006.

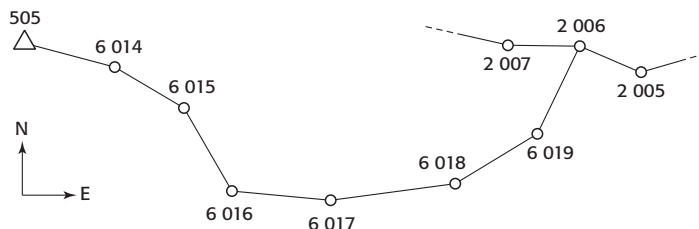


Figure 5.12. Cheminement encadré.

STATIONS	POINTS VISÉS	ANGLES AZIMUTUAUX	DISTANCES RÉDUITES	E	N
6019	2006	0 gon	117,772 m	1 662 536,05 m	9 315 738,40 m
	6018	239,426	179,774		
2006	2007	0 gon		1 662 207,37	9 315 739,81
	2005	240,001		1 662 764,84	9 315 570,56
	6019	302,078			

Calcul préliminaire :  $G_0$  pondéré de la station 2006.

Gisements arrondis à l'approximation des données, compte tenu de l'ajustement ultérieur des  $\Delta E$  et  $\Delta N$  ; une décimale de calcul pour les distances et les coordonnées relatives.

[www.bouquin.tk](http://www.bouquin.tk)



SOMMETS	ORIENTATION		COORDONNÉES				
	Â	G	D	ΔE	E	ΔN	N
25 ↓ 505	243,692 gon	90,887 gon			1 661 785,74 m		9 315 813,74 m
↓ 6014	210,350	134,580	153,827 m	131,686 m + 3 mm	1 661 917,43	- 79,507 - 4 mm	9 315 734,23
↓ 6015	236,081	144,931	170,193	129,535 + 3	1 662 046,97	- 110,391 - 5	9 315 623,83
↓ 6016	143,204	181,013	127,710	37,527 + 3	1 662 084,50	- 122,072 - 3	9 315 501,76
↓ 6017	162,712	124,218	165,993	154,126 + 3	1 662 238,63	- 61,634 - 4	9 315 440,12
↓ 6018	154,854	86,930	187,283	183,350 + 4	1 662 421,98	38,180 - 5	9 315 478,30
↓ 6019	160,574	41,784	179,774	109,702 + 3	1 662 531,69	142,422 - 5	9 315 620,71
↓ 2006	97,922	2,359	117,772	4,363 + 2	1 662 536,05	117,691 - 3	9 315 738,40
↓		G <sub>F</sub> 300,282					
↓							
↓		G <sub>fa</sub> 300,276	1 102,552		1 661 536,029 c <sub>E</sub> = 2,1 cm		9 315 738,429 c <sub>N</sub> = - 2,9 cm
↓		c <sub>A</sub> 6 mgon					F = 3,6 cm
↓		T <sub>A</sub> 11 mgon					T <sub>F</sub> = 7,5 cm

Si  $\sigma_{Gd} = 3$  mgon,  $\sigma_{Gf} = 2$  mgon et  $\sigma_{\hat{V}} = 0.5$  mgon, la tolérance angulaire vaut :

$$T_A = 2,58 \times \sqrt{\sigma_{Gd}^2 + \sigma_{Gf}^2 + (\sigma_{\hat{V}} \times \sqrt{2} \times \sqrt{8})^2} = 11 \text{ mgon}$$

En considérant une précision des points de départ et d'arrivée de 2 cm et un écart-type sur la mesure des côtés de : 2 mm + 2 ppm, la tolérance de fermeture planimétrique vaut :

$$T_F = 2,58 \times \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_n^2 + \sum \sigma_{\text{côtés}}^2} = 7,5 \text{ cm}$$

**www.bouquin.tk**

### Exploitation des coordonnées

Comme pour le cheminement ouvert, les coordonnées absolues permettent seules les calculs ultérieurs dépendant d'elles, sans préjuger des observations initiales qui ont permis de les déterminer ; ainsi dans l'exemple précédent, le  $G_0$  de la station 2006 sera calculé à partir des coordonnées définitives des sommets 2005, 2007 et 6019.

En cas de besoin, les observations initiales, angles et distances réduites, sont remplacées par les valeurs déduites du calcul en retour :  $G \Rightarrow \hat{A}, D$ .

Enfin, les écarts entre les angles et distances observés et ceux calculés en retour permettent l'étude critique des différentes méthodes d'ajustement.

## 5.3.4 Localisation des erreurs parasites

### 5.3.4.1 Erreur parasite d'observation sur un angle

#### Graphique

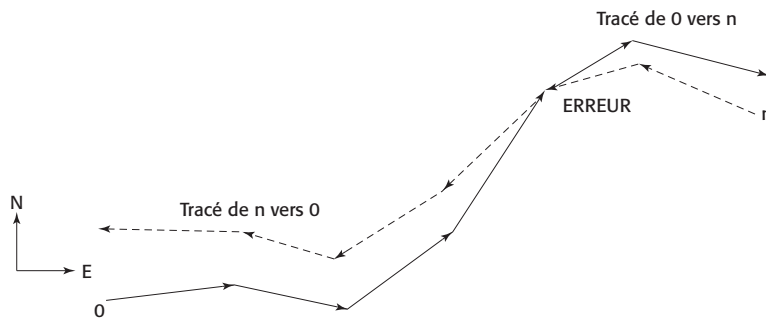


Figure 5.13. Erreur parasite d'angle.

Quand la fermeture angulaire, vérification des calculs faite, dépasse nettement la tolérance, reporter à très grande échelle les côtés successifs selon deux tracés indépendants exécutés en sens inverses (figure 5.13) :

- le premier, en partant du point 0 comme origine mis en place par ses coordonnées rectangulaires, orienté avec le gisement de départ  $G_d$ , en plaçant bout à bout les côtés successifs, à l'aide des angles polygonaux et des distances réduites, jusqu'à l'extrémité  $n$  ;
- le second, en partant du point  $n$  comme origine mis en place par ses coordonnées rectangulaires, avec le gisement de référence au point  $n$ , en plaçant bout à bout les côtés successifs à l'aide des angles et distances réduites.

Le sommet où les deux tracés se croisent est affecté par l'erreur parasite d'angle.

#### Calcul aller-retour

Si la valeur absolue de l'erreur de fermeture angulaire est trop faible pour permettre sa localisation graphique, calculer deux cheminements ouverts indépendants l'un de l'autre :

- le cheminement aller de 0 vers n, à partir du gisement de référence et des coordonnées de 0, en ignorant les données du point n ; d'où les coordonnées des sommets  $0 \dots i_A \dots n_A$  ;
- le cheminement retour, dans l'autre sens de n vers 0, à partir du gisement de référence et des coordonnées de n, en ignorant les données du point 0 ; d'où les coordonnées  $n \dots i_R \dots 0_R$ .

Ensuite, calculer par conversions  $R \rightarrow P$  les distances  $0-0_R, \dots, i_A-i_R, \dots, n_A-n$ .

L'angle erroné correspond au sommet dont les coordonnées sont les plus voisines dans les deux calculs, autrement dit celles pour lesquelles la distance  $i_A-i_R$  est la plus petite.

#### Coordonnées du sommet d'angle erroné

Calculer d'abord les coordonnées des sommets du cheminement ouvert de 0 vers n comme précédemment, d'où  $En_a$  et  $Nn_a$ .

Soit  $e_{\hat{A}}$  l'erreur de fermeture angulaire :  $e_{\hat{A}} = Gf_a - Gf = -c_{\hat{A}}$ , considérée comme représentant l'erreur parasite les autres erreurs aléatoires pouvant, en comparaison, être négligées.

i étant le sommet d'angle erroné, on peut écrire :

$$\begin{aligned} En &= Ei + Di+1 \cdot \sin Gi+1 + \dots + Dn \cdot \sin Gn \\ En_a &= Ei + Di+1 \cdot \sin (Gi+1 + e_{\hat{A}}) + \dots + Dn \cdot \sin (Gn + e_{\hat{A}}) \end{aligned}$$

$$En + En_a = 2Ei + Di+1 \cdot [\sin Gi+1 + \sin (Gi+1 + e_{\hat{A}})] + \dots + Dn \cdot [\sin Gn + \sin (Gn + e_{\hat{A}})]$$

$$En + En_a = 2Ei + Di+1 \cdot 2 \sin \left( Gi+1 + \frac{e_{\hat{A}}}{2} \right) \cdot \cos \left( -\frac{e_{\hat{A}}}{2} \right) + \dots + Dn \cdot 2 \sin \left( Gn + \frac{e_{\hat{A}}}{2} \right) \cdot \cos \left( -\frac{e_{\hat{A}}}{2} \right)$$

$$En + En_a = 2Ei + 2 \cos \frac{e_{\hat{A}}}{2} \left[ Di+1 \cdot \sin \left( Gi+1 + \frac{e_{\hat{A}}}{2} \right) + \dots + Dn \cdot \sin \left( Gn + \frac{e_{\hat{A}}}{2} \right) \right]$$

$$\text{Soit : } Di+1 \cdot \sin \left( Gi+1 + \frac{e_{\hat{A}}}{2} \right) + \dots + Dn \cdot \sin \left( Gn + \frac{e_{\hat{A}}}{2} \right) = \frac{En + En_a - 2Ei}{2 \cos \frac{e_{\hat{A}}}{2}}$$

De manière similaire, on démontre :

$$Di+1 \cdot \sin \left( Gi+1 + \frac{e_{\hat{A}}}{2} \right) + \dots + Dn \cdot \sin \left( Gn + \frac{e_{\hat{A}}}{2} \right) = \frac{Nn + Nn_a}{2 \sin \frac{e_{\hat{A}}}{2}}$$

En égalant, on obtient, tous calculs faits, les formules de Broennimann :

$$\begin{aligned} Ei &= \frac{En + En_a}{2} - \frac{Nn - Nn_a}{2} \cdot \cotan \frac{e_{\hat{A}}}{2} \\ Ni &= \frac{Nn + Nn_a}{2} + \frac{En - En_a}{2} \cdot \cotan \frac{e_{\hat{A}}}{2} \end{aligned}$$

La comparaison de  $Ei$   $Ni$  avec les coordonnées des sommets du cheminement ouvert de 0 vers n, calculé précédemment, permet de localiser le sommet d'angle erroné.

### 5.3.4.2 Erreur parasite d'observation sur une distance

#### Graphique

Lorsque le vecteur de fermeture du cheminement réversible est hors tolérance de manière importante, vérification des calculs faite, reporter comme précédemment deux tracés en sens inverses (figure 5.14).

L'erreur parasite de distance affecte le côté commun aux deux tracés.

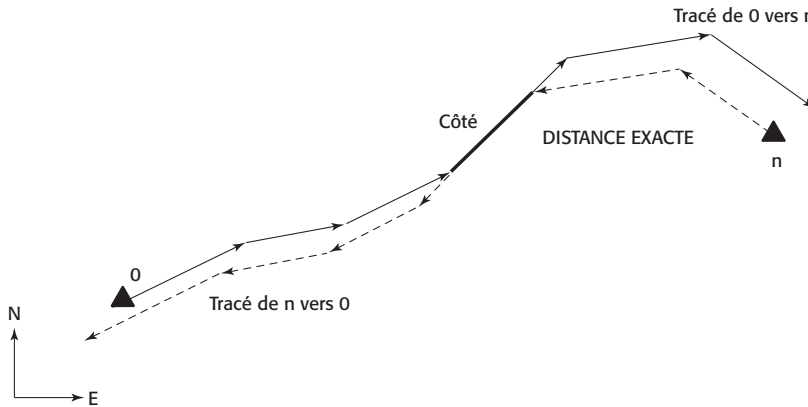


Figure 5.14. Erreur parasite de distance.

#### Calcul du gisement du côté erroné

Le gisement du vecteur de fermeture :  $G_{n,0} = \arctan \frac{e_E}{e_N}$ , comparé aux gisements des différents côtés, peut permettre de localiser la distance erronée, sous réserve qu'ils soient sensiblement différents entre eux.

### 5.3.4.3 Erreurs simultanées d'angles ou de distances

Difficiles à localiser ; les graphiques en sens inverses ou calculs aller-retour sont les procédés les plus efficaces.

À noter que si l'opérateur, lors des observations, a pris la précaution d'intersecter un signal unique depuis la plupart des sommets des cheminements, clocher du village par exemple, l'étude du graphique d'intersection de ce signal peut permettre de localiser une erreur d'angle et une erreur de distance affectant un même cheminement.

### 5.3.5 Point nodal et cheminements nodaux planimétriques

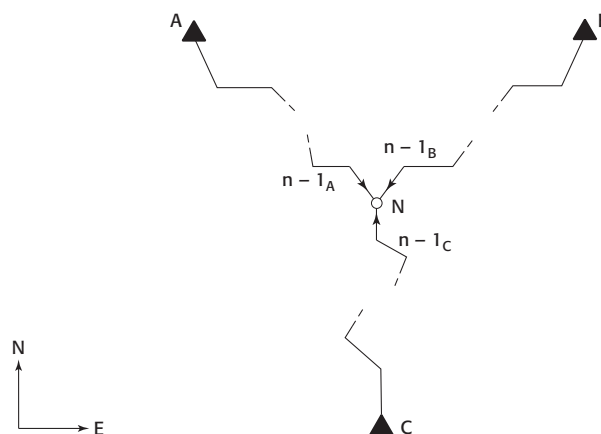


Figure 5.15. Point nodal planimétrique.

#### 5.3.5.1 Observations

Les cheminements polygonaux reliant les points connus A, B, C (figure 5.15) peuvent être calculés suivant plusieurs filiations :

- cheminement encadré  $A \rightarrow B$ , sur lequel se greffe ensuite le cheminement encadré  $C \rightarrow N$  ;
- cheminement encadré  $A \rightarrow C$ , sur lequel se greffe ensuite le cheminement encadré  $B \rightarrow N$  ;
- cheminement encadré  $B \rightarrow C$ , sur lequel se greffe ensuite le cheminement encadré  $A \rightarrow N$ .

Compte tenu des ajustements en angles puis en coordonnées, les résultats différeront légèrement selon la filiation choisie, alors que cette dernière est arbitraire et que les données sont strictes ; de manière à obtenir un résultat unique et à homogénéiser l'ensemble du canevas polygonal, la filiation est remplacée par le *point nodal* généré par les *cheminements nodaux*.

Le point nodal N est le point d'aboutissement de plusieurs cheminements ouverts issus d'origines différentes : A, B, C par exemple ; c'est l'extrémité commune à tous ces cheminements, inconnue en coordonnées et dépourvue de direction d'orientation.

Les observations d'angles et de distances sont les mêmes que celles des cheminements ouverts, auxquelles s'ajoute toutefois le tour d'horizon au point nodal N sur les avant-derniers sommets  $n-1$  des cheminements.

Les cheminements nodaux  $A \rightarrow N$ ,  $B \rightarrow N$ ,  $C \rightarrow N$  sont initialement des cheminements ouverts qui fournissent l'orientation au point nodal et ses coordonnées *avant* d'être calculés comme des cheminements encadrés.

Le point nodal, nœud de plusieurs cheminements nodaux, est une solution préférentielle à la filiation.

## 5.3.5.2. Calculs

Première phase : orientation

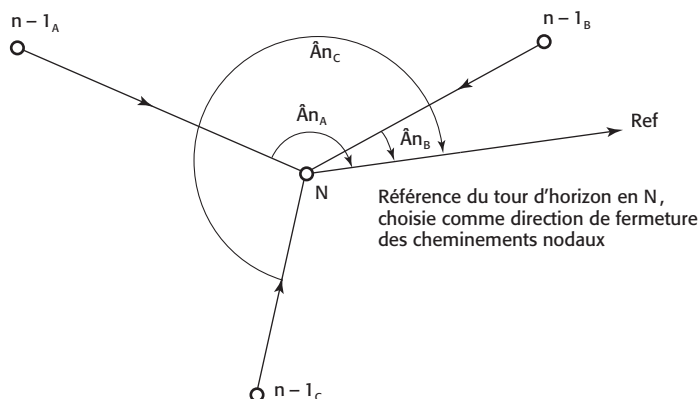


Figure 5.16. Référence quelconque.

Si le tour d'horizon en N sur les avant-derniers sommets  $n-1$  des cheminements est réduit sur une direction autre, choisie lors des observations pour la qualité du pointé par exemple (figure 5.16), dont le gisement est évidemment inconnu, prendre cette direction N Ref comme direction de fermeture en orientation pour chaque cheminement nodal ; les angles polygonaux en N :  $\hat{A}n_A, \hat{A}n_B, \hat{A}n_C$  sont déduits du tour d'horizon.

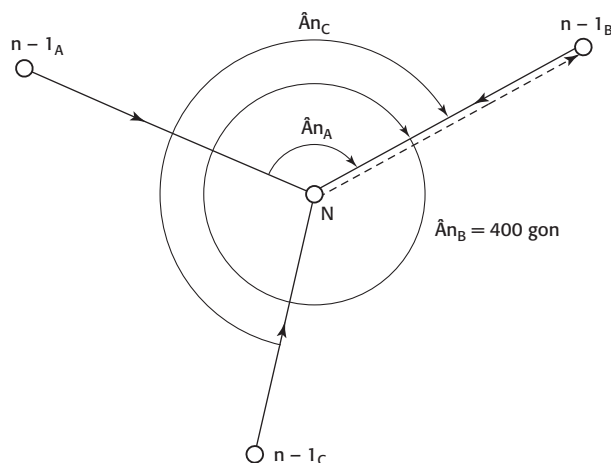


Figure 5.17. Dernier côté le plus long, choisi comme référence.

En revanche, si le tour d'horizon en N est limité aux avant-derniers sommets  $n-1$  des cheminements (figure 5.17), prendre comme direction de fermeture en orientation pour chaque cheminement nodal le côté le plus long, N,  $n-1_B$  par exemple, lequel d'ailleurs est en

principe le côté de référence du tour ; dans ce cas, l'angle polygonal en N pour le cheminement issu de B est égal à 400 gon.

La transmission des gisements donne :

$$Gf_A = Gd_A + \sum_{i=0}^{n_A} \hat{A}i - (n_A + 1) 200$$

$$Gf_B = Gd_B + \sum_{i=0}^{n_B} \hat{A}i - (n_B + 1) 200$$

$$Gf_C = Gd_C + \sum_{i=0}^{n_C} \hat{A}i - (n_C + 1) 200$$

Le gisement de fermeture au point nodal, commun à tous les cheminements nodaux, est égal à la moyenne pondérée des gisements de fermeture approchés précédents, sous réserve bien entendu qu'ils soient très voisins ; d'ailleurs, si un de ces gisements approchés s'écarterait nettement des autres, il faudrait le vérifier.

Les poids étant les inverses des carrés des tolérances angulaires correspondantes, il vient :

$$Gf_N = \frac{\frac{1}{T_A^2} \cdot Gf_A + \frac{1}{T_B^2} \cdot Gf_B + \frac{1}{T_C^2} \cdot Gf_C}{\frac{1}{T_A^2} + \frac{1}{T_B^2} + \frac{1}{T_C^2}}$$

La moyenne arithmétique peut remplacer la moyenne pondérée, notamment lorsque les différents cheminements nodaux ont à peu près le même nombre de côtés. Le gisement de fermeture  $Gf_N$ , une fois calculé, est introduit dans chaque cheminement ouvert, les transformant ainsi en cheminements encadrés qui sont alors rendus réversibles, sous réserve bien entendu du respect des tolérances.

### Seconde phase : coordonnées

Les gisements réversibles des côtés et les distances réduites permettent le calcul des coordonnées approchées de l'extrémité des cheminements ouverts.

$$\begin{aligned} E_{N_A} &= E_A + \sum_{i=1}^{n_A} \Delta Ei & E_{N_B} &= E_B + \sum_{i=1}^{n_B} \Delta Ei & E_{N_C} &= E_C + \sum_{i=1}^{n_C} \Delta Ei \\ N_{N_A} &= N_A + \sum_{i=1}^{n_A} \Delta Ni & N_{N_B} &= N_B + \sum_{i=1}^{n_B} \Delta Ni & N_{N_C} &= N_C + \sum_{i=1}^{n_C} \Delta Ni \end{aligned}$$

La moyenne pondérée, éventuellement la moyenne arithmétique, de ces valeurs approchées en principe voisines, donne les coordonnées définitives du point nodal N, les poids étant ici encore les inverses des carrés des tolérances correspondantes :

$$\begin{aligned} E_N &= \frac{\frac{1}{T_A^2} \cdot E_{N_A} + \frac{1}{T_B^2} \cdot E_{N_B} + \frac{1}{T_C^2} \cdot E_{N_C}}{\frac{1}{T_A^2} + \frac{1}{T_B^2} + \frac{1}{T_C^2}} & N_N &= \frac{\frac{1}{T_A^2} \cdot N_{N_A} + \frac{1}{T_B^2} \cdot N_{N_B} + \frac{1}{T_C^2} \cdot N_{N_C}}{\frac{1}{T_A^2} + \frac{1}{T_B^2} + \frac{1}{T_C^2}} \end{aligned}$$

Les coordonnées du point nodal une fois déterminées sont introduites dans chaque cheminement ouvert, les transformant ainsi en cheminements nodaux calculés comme des cheminements encadrés, sous réserve du respect des tolérances.

*Synoptique*

La figure 5.18 schématise la transformation des cheminements ouverts en cheminements nodaux, calculés comme des cheminements encadrés, en deux phases, après détermination du point nodal.

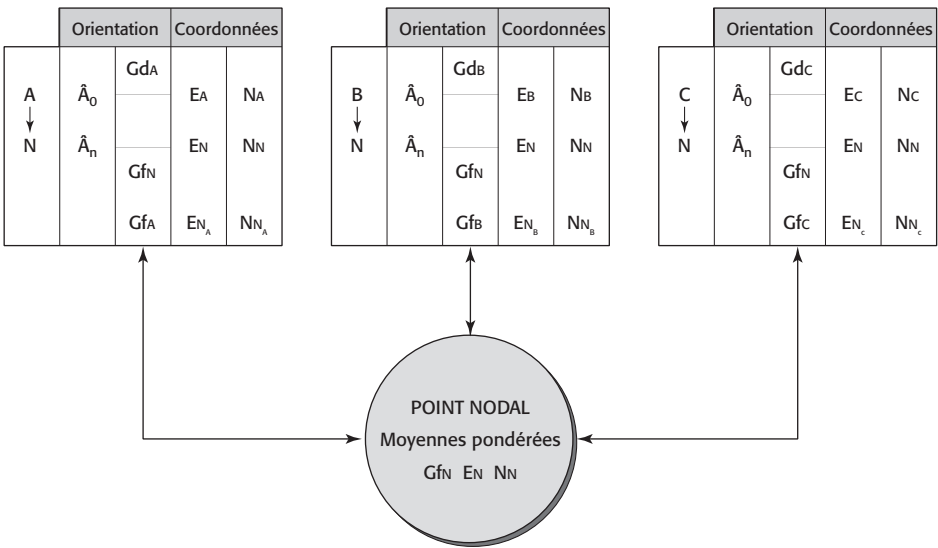


Figure 5.18. Synoptique du calcul d'un point nodal planimétrique.

**5.3.5.3 Points nodaux multiples**

Ce sont des nœuds de cheminements (figure 5.19) traités par calcul en bloc et compensés par moindres carrés (§5.2).

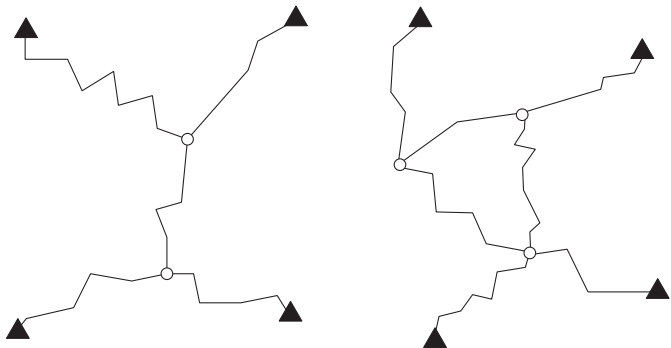


Figure 5.19. Points nodaux multiples.



### 5.3.6 Cheminement fermé

C'est un polygone, calculé comme un cheminement encadré dont un sommet tient lieu à la fois d'origine 0 et d'extrémité n.

Deux cas sont envisageables.

#### 5.3.6.1 L'orientation et les coordonnées à l'origine sont connues

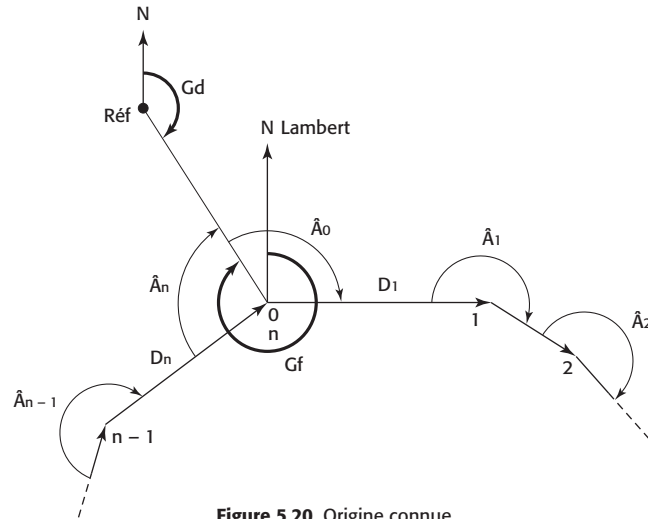


Figure 5.20. Origine connue.

#### Observations

Le gisement de départ :  $G_d = G_{\overrightarrow{\text{Réf}, n}}$  et les coordonnées  $E_0 = E_n$ ,  $N_0 = N_n$  étant connus, les observations consistent à effectuer le tour d'horizon en 0 sur Ref, 1, n-1, à mesurer les angles polygonaux  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_{n-1}$  et à déterminer les distances réduites  $D_1, D_2, \dots, D_n$  (figure 5.20).

#### Calculs

$G_f = G_d + 200$ .

$\hat{A}_0, \hat{A}_n$  déduits du tour d'horizon en 0.

Algorithme de calcul du cheminement encadré, remarque faite que les tolérances sont réduites du fait que le point de départ et l'orientation sont les mêmes à l'origine et à l'extrémité.

#### Remarques

Une erreur, même grossière, sur les coordonnées de 0 provoque une translation indétectable de l'ensemble du polygone.

De la même manière, une erreur, même grossière, sur le gisement de départ est indétectable à la fermeture angulaire ; elle génère une rotation de l'ensemble du polygone autour du point 0, sans le déformer. En conséquence, vérifier l'orientation de départ, à l'aide d'un  $G_0$  par exemple.

Enfin, une erreur systématique proportionnelle à la longueur dans les mesures des distances, conduit au calcul d'un polygone homothétique : 0, 1', 2', ..., n-1', n, sans que cette déformation soit révélée par le vecteur de fermeture (figure 5.21).

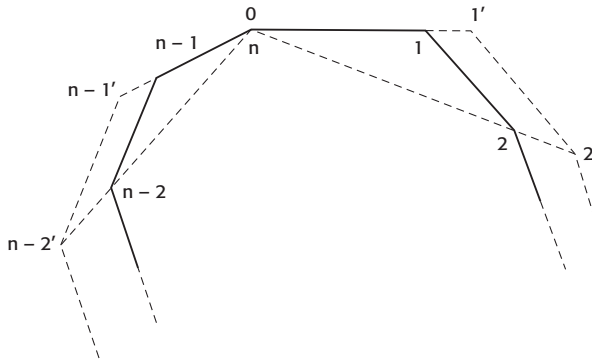


Figure 5.21. Erreur proportionnelle à la longueur.

### 5.3.6.2 Orientation sommaire, origine inconnue

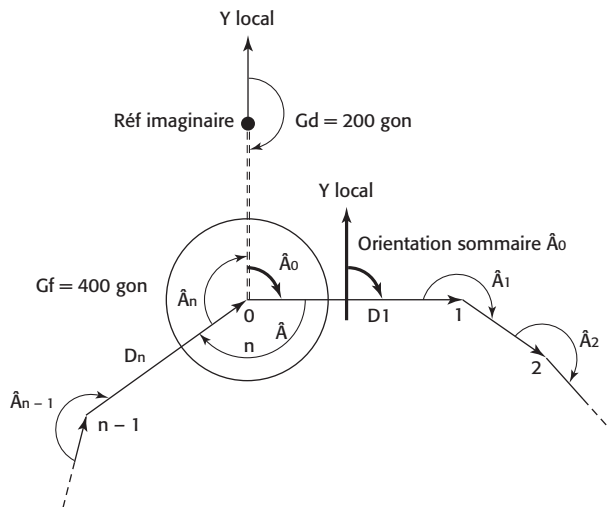


Figure 5.22. Orientation sommaire, absence de repère orthonormé.

#### Observations

Angles du polygone et distances réduites ; au sommet 0, le seul angle mesuré est l'angle  $\hat{A}$  des côtés 1 et n (figure 5.22).

Orientation sommaire du premier côté : mesure sur carte, orientation magnétique, gyroscopique ou astronomique.

#### Calculs

Repère orthonormé local, orienté par un gisement de référence  $G_d$  rigoureusement égal à 200 gon, c'est-à-dire une référence imaginaire située exactement dans la direction des ordonnées à partir de l'origine 0 et faisant avec le premier côté un *angle polygonal*  $\hat{A}_0$  strictement égal à l'orientation sommaire.

Dès lors :  $G_f = G_n$ , Réf = 400 gon  
 $\hat{A}_n = 400 - (\hat{A}_0 + \hat{A})$  (cas de figure)

$x_0 = x_n$ ,  $y_0 = y_n$  définis arbitrairement de manière à éviter les coordonnées négatives  
 Algorithme de calcul du cas précédent.

### 5.3.6.3 Origine inconnue, orientation du premier côté strictement imposée

#### Observations

Cas précédent, sans l'orientation sommaire remplacée par une valeur rigoureuse.

#### Calculs

##### Première phase

Identique au cas précédent avec  $\hat{A}_0$  = orientation imposée. Les ajustements successifs des angles et des coordonnées relatives modifient le gisement imposé ; si cette modification est suffisamment petite pour pouvoir être négligée, cas le plus fréquent d'un cheminement fermé servant de canevas planimétrique local pour un levé de détail limité, le calcul s'arrête là ; on est ramené au cas précédent avec un gisement imposé qui tient lieu d'orientation sommaire. En revanche, si le gisement imposé doit être respecté en toute rigueur, passer à la seconde phase.

##### Seconde phase

Calculer la distance  $D_1$  par conversion  $R \rightarrow P$  des coordonnées de 0 et 1, puis les coordonnées de 1 par conversion  $P \rightarrow R$  du vecteur  $0,1$  avec  $G_1 = G$  imposé.

Changement de repère orthonormé (§ 9.2.5), les points 0 et 1 étant alors connus dans l'ancien repère, qui correspond aux coordonnées ajustées de la première phase, et dans le nouveau repère défini par les coordonnées calculées en dernier lieu ; le changement de repère ne modifie pas la géométrie du polygone ajusté précédemment.

## 5.3.7 Canevas de polygonation

### 5.3.7.1 Cheminements principaux et cheminements secondaires

Un cheminement doit posséder trois caractéristiques :

- *proche des détails à lever*, les sommets successifs étant implantés de façon à être visibles l'un de l'autre et permettre de viser le maximum de points de détails ; par conséquent, éviter de placer un sommet près d'un masque qui crée un angle mort ;
- *tendu*, c'est-à-dire proche de la droite qui joint l'origine à l'extrémité et représente la direction générale du cheminement, à l'exclusion évidemment du cheminement fermé ; noter cependant qu'un cheminement peu tendu présente moins d'inconvénients qu'un cheminement à côtés courts, lequel implique des centrages particulièrement soignés ;
- *homogène*, les longueurs des côtés étant voisines, le nombre de côtés n'excédant guère une dizaine.

Pour, d'une part, respecter au mieux des exigences du terrain les caractéristiques souvent contradictoires de proximité, tension et homogénéité, et d'autre part, fixer la filiation ou ordre chronologique des calculs en l'absence de calcul en bloc, le topographe distingue :

- les *cheminements principaux* qui relient deux points de canevas d'ensemble ou encore un point de canevas d'ensemble et un point nodal principal ;
- les *cheminements secondaires*, c'est-à-dire tous les autres, qui s'appuient sur les précédents et sont donc calculés après les cheminements principaux ;
- les *points nodaux et cheminements nodaux*, principaux ou secondaires.

La distinction traditionnelle entre cheminements principaux et secondaires présente l'intérêt de définir clairement l'ordre hiérarchique de calcul des cheminements.

### 5.3.7.2 Désignation et matérialisation

Le topographe établit un *canevas de polygonation* (figure 5.23), qui figure les cheminements, les points nodaux, les désignations des sommets et le sens de calcul de chaque cheminement ; tracer en rouge les cheminements principaux, en bleu les cheminements secondaires par exemple.

Parmi les multiples possibilités de désignation, la DGI prescrit :

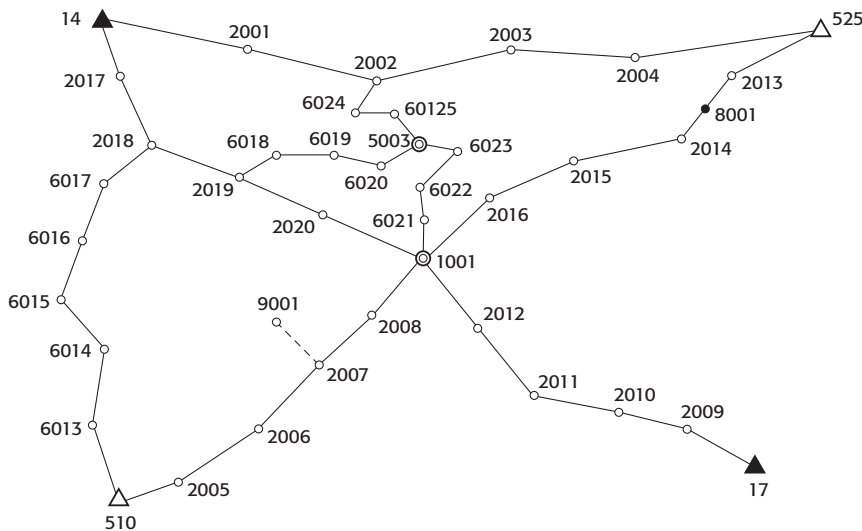


Figure 5.23. Canevas de polygonation.

- stations de polygonation principale :
  - points nodaux principaux 1001 à 1999 (Série 1000),
  - stations ordinaires 2001 à 4999 (Séries 2000, 3000, 4000) ;
- stations de polygonation secondaire ;
  - points nodaux secondaires 5001 à 5999 (Série 5000),
  - stations ordinaires 6001 à 7999 (Séries 6000 et 7000) ;

Dans un même cheminement, les numéros se suivent dans l'ordre naturel des nombres dans le sens de calcul ; représentation par un petit cercle pour les stations ordinaires, deux cercles concentriques pour les points nodaux.

- stations auxiliaires ;
  - stations alignées 8001 à 8999 (Série 8000) ; distances mesurées aux deux stations de cheminement qui l'encadrent,
  - stations lancées 9001 à 9999 (Série 9000).

Les sommets de polygonation matérialisés durablement, points naturels et points bornés, doivent être choisis parmi les cheminements principaux et répartis de façon homogène sur le chantier à la densité minimum de 5 points au  $\text{km}^2$ .

Le mode de matérialisation dépend de la nature du sol :

- terre meuble : borne granit avec croix et repère, scellée dans un massif bétonné de quelques décimètres de côté ;
- sol dur et compact : borne à ancrage à tête granit ou polymérisée ;
- asphalte et bitume : clou d'arpentage, cornière dans un angle de bordure de trottoir ;
- béton : spit, repère chevillé-vissé ;
- rocher : gravure au burin.

Fiche signalétique autorisant un rétablissement éventuel sans observations nouvelles.

Les sommets provisoires sont le plus souvent des piquets bois ou des pointes métalliques.

### 5.3.8 Observations et calculs

Angles polygonaux mesurés avec une paire de séquences de préférence, distances électroniques, traitements numériques par calculs hiérarchisés : réseau principal puis réseau secondaire, ou calcul en bloc ; ajustement proportionnel aux distances ou par moindres carrés.

### 5.3.9 Centrage forcé

Le centrage forcé est mis en œuvre par la méthode des trois trépieds qui consiste à mesurer les angles azimutaux d'un cheminement aéroporté sur les têtes de trépieds, véritable ligne polygonale sans commune mesure géométrique avec l'amalgame hétéroclite d'angles recentrés à chaque sommet sur les points au sol (figure 5.24).

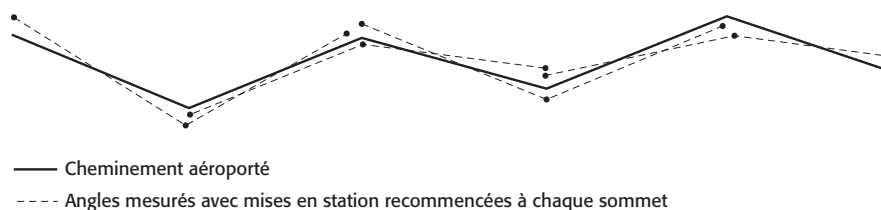


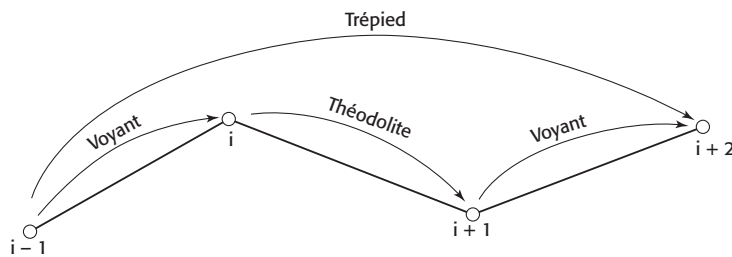
Figure 5.24. Cheminement à centrage forcé.

*Mise en œuvre*

Après avoir mesuré l'angle horizontal en  $i$  et les distances sur les voyants  $i-1$  et  $i+1$  (figure 5.25), décaler l'instrument et les voyants :

- le théodolite  $i$  vient en centrage forcé dans l'embase du trépied  $i+1$  ;
- le voyant  $i-1$  se place également en centrage forcé dans l'embase du trépied  $i$  ;
- le voyant  $i+1$  est centré dans l'embase du trépied  $i-1$ , lequel rejoint  $i+2$ .

En toute rigueur, le centrage forcé ne doit pas être interrompu de l'origine 0 à l'extrémité  $n$  du cheminement ; il ne peut donc y avoir reprise de mise en station au même sommet, ce qui est loin d'être évident lorsque le travail excède une journée par exemple.



**Figure 5.25.** Méthode des trois trépieds.